

КУБРАК А. І., к.т.н., проф.; ЖУЧЕНКО О. А., к.т.н., ас.  
 Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут»

## ПЕРЕДАТНІ ФУНКЦІЇ ТА ЧАСТОТНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ТЕПЛОАКУМУЮЧОЇ СТІНКИ: НОВІ ВАРІАНТИ

Наведено передатні функції й частотні характеристики циліндричної теплоакуючої стінки як об'єкта з розподіленими параметрами залежно від межових умов на зовнішній і внутрішній поверхнях. Отримані результати можуть бути використані для синтезу систем керування.

**Ключові слова:** передатна функція, частотна характеристика, циліндрична теплоакуюча стінка, межові умови.

© Кубрак А. І., Жученко О. А., 2014

**Постановка проблеми.** Майже всі реальні об'єкти керування в хімічній, харчовій, металургійній, нафтопереробній та інших галузях промисловості є об'єктами з розподіленими параметрами. Лише у деяких частинних випадках ці об'єкти можна з прийнятною похибкою звести до відповідних зосереджених об'єктів [1]. З ускладненням об'єктів і підвищенням вимог до точності та адекватності їхнього моделювання таке спрощення стає неможливим, потребуючи створення якісних математичних моделей для типових об'єктів із розподіленими параметрами.

**Аналіз попередніх досліджень.** Аналітичні методи розрахунку моделей об'єктів із розподіленими параметрами є точними та приблизними [2]. Точний розв'язок існує для найпростіших систем, які описують одним рівнянням у частинних похідних першого чи другого порядку [3, 4]. Розв'язки отримують методами джерел, розщеплювання змінних, перетвореннями Фур'є, Лапласа. Інші методи зводять розв'язки до системи інтегральних рівнянь типу Вольтера, Фредгольма, використання функцій Рімана [5, 6]. Але поширити ці методи на вирішення задач, пов'язаних із системами автоматичного керування, не завжди вдається.

З огляду на це, нижче розглядатимемо лише теплові об'єкти з розподіленими параметрами як найбільш поширені в промисловості, математичну модель яких будемо шукати у вигляді передатної функції, як найбільш придатної для досліджень з точки зору аналізу й синтезу систем керування за допомогою існуючих програмних засобів (MathCad, MatLab).

При цьому, щоб звезти клас досліджуваних об'єктів, а також враховуючи, що багато об'єктів хімічної, харчової, нафтопереробної, металообробної та інших галузей промисловості з точки зору математичного моделювання як об'єктів із розподіленими параметрами можна розглядати як циліндричні теплоакуючі стінки, метою статті визначено розроблення математичної моделі останньої у вигляді передатної функції.

**Виклад основного матеріалу.** Одновимірне диференціальне рівняння теплопровідності в циліндричній системі координат має вигляд [1–4, 7]

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right). \quad (1)$$

Виконавши над ним перетворення Лапласа за нульових початкових умов  $\frac{d^2 \bar{u}}{dx^2} + \frac{1}{r} \frac{d \bar{u}}{dr} - \frac{p}{a} \bar{u} = 0$  і замінивши змінну  $r = \frac{x}{\sqrt{p/a}}$ , після спрощення одержимо частинний (коли  $m = 0$ ) випадок

$$\frac{d^2 \bar{u}}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d \bar{u}}{dx} - \bar{u} = 0 \text{ модифікованого диференціального рівняння Бесселя [8]}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} - \left( 1 + \frac{m^2}{x^2} \right) y = 0. \quad (2)$$

Розв'язок (2) доцільно подати так:

$$y = C_1 I_0(x) + C_2 K_0(x), \quad (3)$$

де  $I_0$  і  $K_0(x)$  – модифіковані функції Бесселя I і II роду нульового порядку. Розкладання у ряд для цих функцій за малих  $x$ :

$$I_0(x) = 1 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^6}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2} + \dots, \quad K_0(x) = -\left(C + \ln \frac{x}{2}\right) I_0(x) + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{(1!)^2} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{(2!)^2} \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^6}{(3!)^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \dots;$$

за великих  $x$ :

$$I_0(x) = \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \left( 1 + \frac{1^2}{1!8x} + \frac{1^2 3^2}{2!(8x)^2} + \frac{1^2 3^2 5^2}{3!(8x)^3} + \dots \right), \quad K_0(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} \left( 1 - \frac{1^2}{1!8x} + \frac{1^2 3^2}{2!(8x)^2} - \frac{1^2 3^2 5^2}{3!(8x)^3} + \dots \right).$$

де  $C = 0,5772157\dots$  – стала Ейлера.

Нагадаємо поведінку модифікованих функцій Бесселя за граничних значень аргументу:

$$\begin{cases} I_0(x)|_{x \rightarrow 0} = 1 \\ I_0(x)|_{x \rightarrow \infty} = \infty \\ K_0(x)|_{x \rightarrow 0} = \infty \\ K_0(x)|_{x \rightarrow \infty} = 0 \end{cases}.$$

Похідні від  $I_0(x)$  і  $K_0(x)$ :  $\frac{dI_0(x)}{dx} = I_1(x)$ ;  $\frac{dK_0(x)}{dx} = -K_1(x)$ .

Розкладення в ряди для малих значень аргументу дає

$$I_1(x) = \frac{x}{2} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^3}{1^2 \cdot 2} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^5}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3} + \dots, \quad K_1(x) = \frac{1}{x} I_0(x) + \left(\ln \frac{x}{2} + C\right) I_1(x) - \frac{x}{2} - \frac{x^3}{2^2 \cdot 4} \left(1 + \frac{1}{2}\right) - \frac{x^5}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \dots$$

Асимптотичні ряди (за великих  $x$ ):

$$I_1(x) = \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \left( 1 - \frac{4-1^2}{1!8x} + \frac{(4-1^2)(4-3^2)}{2!(8x)^2} - \dots \right), \quad K_1(x) = e^{-x} \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \left( 1 + \frac{4-1^2}{1!8x} + \frac{(4-1^2)(4-3^2)}{2!(8x)^2} + \dots \right).$$

За граничних аргументів функції  $I_1(x)$  і  $K_1(x)$ :

$$\begin{cases} I_1(x)|_{x=0} = 0 \\ I_1(x)|_{x=\infty} = \infty \\ K_1(x)|_{x=0} = -\infty \\ K_1(x)|_{x=\infty} = 0 \end{cases}.$$

З урахуванням виразу (3) розв'язок диференціального рівняння (1) будемо шукати у вигляді

$$\bar{u} = C_1 I_0 \left( r \sqrt{\frac{p}{a}} \right) + C_2 K_0 \left( r \sqrt{\frac{p}{a}} \right). \quad (4)$$

Для визначення сталих інтегрування  $C_1$  і  $C_2$  потрібно, зазвичай, задати межові умови. Домовимося позначати межові умови на внутрішній поверхні циліндра  $N_{gv}$  (значення 1, 2, 3 якого відповідатимуть межовим умовам першого, другого та третього роду), на зовнішній поверхні –  $N_{gz}$  (із відповідним змістом). Циліндр вважаємо в загальному випадку порожнистим із внутрішнім радіусом  $r_0$  і зовнішнім –  $r_1$ .

Результат розв'язання поставленої задачі повністю залежить від комбінації межових умов на зовнішній і внутрішній поверхнях циліндра. Деякі варіанти проаналізовано в праці [9]. Розглянемо інші.

*Варіант 1.*  $N_{gv} = 3, N_{gz} = 1$ . У цьому випадку межові умови для рівняння (4):

$$\begin{cases} -\frac{\lambda}{\delta_0} \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=r_1} = T_{sv}(t) - u \Big|_{r=r_0}, \\ u \Big|_{r=r_0} = T_z(t) \end{cases},$$

де  $\lambda$  – теплопровідність матеріалу циліндра;  $T_{sv}(t)$  – температура внутрішнього середовища;  $\alpha_0$  – коефіцієнт тепловіддачі від внутрішнього середовища до поверхні циліндра

Перетворимо систему за Лапласом і підставимо у (4). Отримаємо

$$\begin{cases} -\frac{\lambda}{\delta_0} \sqrt{\frac{p}{a}} \left[ C_1 J_1 \left( r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) - C_2 K_1 \left( r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \right] = \bar{T}_{sv}(p) - C_1 J_0 \left( r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) + C_2 K_0 \left( r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \\ \bar{T}_z(p) = C_1 J_0 \left( r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) + C_2 K_0 \left( r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \end{cases}. \quad (5)$$

Використовуючи правило Крамера, знаходимо невідомі  $C_1$  і  $C_2$ :

$$C_1 = \frac{\begin{vmatrix} \overline{T}_{sv}(p) & \frac{\pi}{6_0} \sqrt{\frac{p}{a}} K_1 \left( r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) + K_0 \left( r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \\ \overline{T}_z(p) & K_0 \left( r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\pi}{6_0} \sqrt{\frac{p}{a}} J_1 \left( r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) + J_0 \left( r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) & \frac{\pi}{6_0} \sqrt{\frac{p}{a}} K_1 \left( r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) + K_0 \left( r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \\ J_0 \left( r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) & K_0 \left( r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \end{vmatrix}} = \frac{\overline{T}_{sv}(p) K_0 \left( r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) - \overline{T}_z(p) \left[ \frac{\pi}{6_0} \sqrt{\frac{p}{a}} K_1 \left( r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) + K_0 \left( r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \right]}{Z_n(p)},$$

$$C_2 = \frac{\begin{vmatrix} -\frac{\pi}{6_0} \sqrt{\frac{p}{a}} J_1 \left( r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) + J_0 \left( r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) & \overline{T}_{sv}(p) \\ J_0 \left( r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) & \overline{T}_z(p) \end{vmatrix}}{Z_n(p)} = \frac{\left[ J_0 \left( r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) - \frac{\pi}{6_0} \sqrt{\frac{p}{a}} J_1 \left( r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) + J_0 \left( r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \right] \overline{T}_z(p) - J_0 \left( r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \overline{T}_{sv}(p)}{Z_n(p)}.$$

де  $Z_n(p) = J_0 \left( r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) K_0 \left( r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) - K_0 \left( r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) J_0 \left( r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) - \frac{\pi}{6_1} \sqrt{\frac{p}{a}} \left[ J_1 \left( r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) K_0 \left( r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) + K_1 \left( r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) J_0 \left( r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \right]$ .

Підставляючи  $C_1$  і  $C_2$  у вираз (5):

$$\frac{\left\{ \overline{T}_{sv}(p) K_0 \left( r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) - \overline{T}_z(p) \left[ \frac{\pi}{6_0} \sqrt{\frac{p}{a}} K_1 \left( r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) + K_0 \left( r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \right] \right\} J_0 \left( r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) + \left[ J_0 \left( r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) - \frac{\pi}{6_0} \sqrt{\frac{p}{a}} J_1 \left( r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) - J_0 \left( r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \overline{T}_{sv}(p) \right] K_0 \left( r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right)}{Z_n(p)}.$$

Звідси шукані передатні функції:

$$W_{T_{sv} \rightarrow n}(p, r) = \frac{K_0 \left( r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) J_0 \left( r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) - J_0 \left( r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) K_0 \left( r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right)}{Z_n(p)},$$

$$W_{T_z \rightarrow n}(p, r) = \frac{\left[ J_0 \left( r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) - \frac{\pi}{6_0} \sqrt{\frac{p}{a}} J_1 \left( r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \right] K_0 \left( r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) - \left[ K_0 \left( r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) + \frac{\pi}{6_0} \sqrt{\frac{p}{a}} K_1 \left( r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \right] J_0 \left( r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right)}{Z_n(p)},$$

де  $W_{T_{sv} \rightarrow 0}(p, r)$  – передатна функція за каналом «температура внутрішнього середовища – температура циліндра за радіусом»;  $W_{T_z \rightarrow 0}(p, r)$  – передатна функція за каналом «температура зовнішньої поверхні циліндра – температура циліндра за радіусом».

Варіант 2.  $N_{gv} = 3$ ,  $N_{gz} = 2$ . Межові умови для рівняння (4):

$$\begin{cases} -\frac{\pi}{6_0} \frac{\partial \theta}{\partial r} \Big|_{r=r_1} = T_{sv}(t) - \theta \Big|_{r=r_0}, \\ \theta \Big|_{r=r_0} = Q_z(t) \end{cases},$$

де  $Q_z(t)$  – зовнішній тепловий потік

Після перетворення за Лапласом та підстановки у (4):

$$\begin{cases} -\frac{\pi}{6_0} \sqrt{\frac{p}{a}} \left[ C_1 J_1 \left( r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) - C_2 K_1 \left( r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \right] = \overline{T}_{sv}(p) - C_1 J_0 \left( r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) - C_2 K_0 \left( r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \\ -\frac{Q_z(p)}{\pi \sqrt{\frac{p}{a}}} = C_1 J_1 \left( r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) - C_2 K_1 \left( r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \end{cases} \quad (6)$$

Коефіцієнти:

$$C_1 = \frac{\begin{vmatrix} \overline{T}_{sv}(p) & \frac{\pi}{\delta_0} \sqrt{\frac{p}{a}} K_1 \left( r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) + K_0 \left( r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \\ \frac{\overline{Q}_z(p)}{\pi \sqrt{\frac{p}{a}}} & -K_1 \left( r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\frac{\pi}{\delta_0} \sqrt{\frac{p}{a}} J_1 \left( r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) + J_0 \left( r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) & \frac{\pi}{\delta_0} \sqrt{\frac{p}{a}} K_1 \left( r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) + K_0 \left( r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \\ J_1 \left( r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) & -K_1 \left( r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \end{vmatrix}} = \frac{\frac{\overline{Q}_z(p)}{\pi \sqrt{\frac{p}{a}}} \left[ \frac{\pi}{\delta_0} \sqrt{\frac{p}{a}} K_1 \left( r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) + K_0 \left( r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \right] - \overline{T}_{sv}(p) K_1 \left( r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right)}{Z_n(p)},$$

$$C_2 = \frac{\begin{vmatrix} -\frac{\pi}{\delta_0} \sqrt{\frac{p}{a}} J_1 \left( r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) + J_0 \left( r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) & \overline{T}_{sv}(p) \\ J_1 \left( r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) & -\frac{\overline{Q}_z(p)}{\pi \sqrt{\frac{p}{a}}} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\frac{\pi}{\delta_0} \sqrt{\frac{p}{a}} J_1 \left( r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) + J_0 \left( r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) & \frac{\pi}{\delta_0} \sqrt{\frac{p}{a}} K_1 \left( r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) + K_0 \left( r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \\ J_1 \left( r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) & -K_1 \left( r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \end{vmatrix}} = \frac{-\frac{\overline{Q}_z(p)}{\pi \sqrt{\frac{p}{a}}} \left[ -\frac{\pi}{\delta_0} \sqrt{\frac{p}{a}} J_1 \left( r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) + J_0 \left( r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \right] - \overline{T}_{sv}(p) J_1 \left( r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right)}{Z_n(p)},$$

де  $Z_n(p) = \left[ J_0 \left( r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) - \frac{\pi}{\delta_0} \sqrt{\frac{p}{a}} J_1 \left( r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \right] K_1 \left( r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) + \left[ K_0 \left( r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) + \frac{\pi}{\delta_0} \sqrt{\frac{p}{a}} K_1 \left( r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \right] J_1 \left( r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right)$ .

Після підстановки  $C_1$  і  $C_2$  у рівняння (б):

$$\overline{u} = \frac{\left\{ \frac{\overline{Q}_z(p)}{\pi \sqrt{\frac{p}{a}}} \left[ \frac{\pi}{\delta_0} \sqrt{\frac{p}{a}} K_1 \left( r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) + K_0 \left( r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \right] - \overline{T}_{sv}(p) K_1 \left( r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \right\} J_0 \left( r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) + \left\{ -\frac{\overline{Q}_z(p)}{\pi \sqrt{\frac{p}{a}}} \left[ -\frac{\pi}{\delta_0} \sqrt{\frac{p}{a}} J_1 \left( r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) + J_0 \left( r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \right] - \overline{T}_{sv}(p) J_1 \left( r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \right\} K_0 \left( r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right)}{Z_n(p)}$$

Передатні функції  $W_{T_{sv} \rightarrow 0}(p, r)$  і  $W_{Q_z \rightarrow 0}(p, r)$ :

$$W_{T_{sv} \rightarrow 0}(p, r) = \frac{K_1 \left( r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) J_0 \left( r \sqrt{\frac{p}{a}} \right) + J_1 \left( r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) K_0 \left( r \sqrt{\frac{p}{a}} \right)}{Z_n(p)},$$

$$W_{Q_z \rightarrow 0}(p, r) = \frac{\left[ J_0 \left( r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) - \frac{\pi}{\delta_0} \sqrt{\frac{p}{a}} J_1 \left( r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \right] K_0 \left( r \sqrt{\frac{p}{a}} \right) - \left[ K_0 \left( r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) + \frac{\pi}{\delta_0} \sqrt{\frac{p}{a}} K_1 \left( r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \right] J_0 \left( r \sqrt{\frac{p}{a}} \right)}{Z_n(p)}.$$

Варіант 3.  $N_{gv} = 3$ ,  $N_{gz} = 3$ . Межові умови:

$$\begin{cases} -\frac{\pi}{\delta_0} \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=r_1} = T_{sv}(t) - u \Big|_{r=r_0} \\ -\frac{\pi}{\delta_1} \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=r_1} = u \Big|_{r=r_0} - T_{sz}(t) \end{cases},$$

де  $\lambda$  – коефіцієнт теплопровідності матеріалу циліндра;  $\alpha_1$  – коефіцієнт тепловіддачі від зовнішнього середовища до поверхні циліндра;  $T_{sz}(t)$  – температура зовнішнього середовища.

Перетворюємо рівняння за Лапласом і підставляємо у рівняння (4):

$$\begin{cases} -\frac{\pi}{\delta_0} \sqrt{\frac{p}{a}} \left[ C_1 J_1 \left( r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) - C_2 K_1 \left( r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \right] = \overline{T}_{sv}(p) - C_1 J_0 \left( r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) - C_2 K_0 \left( r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \\ -\frac{\pi}{\delta_1} \sqrt{\frac{p}{a}} \left[ C_1 J_1 \left( r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) - C_2 K_1 \left( r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \right] = C_1 J_0 \left( r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) + C_2 K_0 \left( r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) - \overline{T}_{sz}(p) \end{cases}.$$

Невідомі коефіцієнти розраховуємо за формулами

$$C_1 = \frac{\begin{vmatrix} \overline{T}_{sv}(p) & \frac{\pi}{6_0} \sqrt{\frac{p}{a}} K_1 \left( r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) + K_0 \left( r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \\ -\overline{T}_{sz}(p) & \frac{\pi}{6_1} \sqrt{\frac{p}{a}} K_1 \left( r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) - K_0 \left( r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\frac{\pi}{6_0} \sqrt{\frac{p}{a}} J_1 \left( r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) + J_0 \left( r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) & \frac{\pi}{6_0} \sqrt{\frac{p}{a}} K_1 \left( r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) + K_0 \left( r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \\ -\frac{\pi}{6_1} \sqrt{\frac{p}{a}} J_1 \left( r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) - J_0 \left( r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) & -\frac{\pi}{6_1} \sqrt{\frac{p}{a}} K_1 \left( r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) - K_0 \left( r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \end{vmatrix}} =$$

$$= \frac{\overline{T}_{sv}(p) \left[ \frac{\pi}{6_1} \sqrt{\frac{p}{a}} K_1 \left( r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) - K_0 \left( r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \right] + \overline{T}_{sz}(p) \left[ \frac{\pi}{6_0} \sqrt{\frac{p}{a}} K_1 \left( r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) + K_0 \left( r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \right]}{Z_n(p)},$$

$$C_2 = \frac{\begin{vmatrix} -\frac{\pi}{6_0} \sqrt{\frac{p}{a}} J_1 \left( r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) + J_0 \left( r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) & \overline{T}_{sv}(p) \\ -\frac{\pi}{6_1} \sqrt{\frac{p}{a}} J_1 \left( r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) - J_1 \left( r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) & -\overline{T}_{sz}(p) \end{vmatrix}}{Z_n(p)} =$$

$$= \frac{\overline{T}_{sv}(p) \left[ -\frac{\pi}{6_1} \sqrt{\frac{p}{a}} J_1 \left( r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) - J_1 \left( r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \right] - \overline{T}_{sz}(p) \left[ -\frac{\pi}{6_0} \sqrt{\frac{p}{a}} J_1 \left( r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) + J_0 \left( r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \right]}{Z_n(p)},$$

$$Z_n(p) = \left[ J_0 \left( r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) - \frac{\lambda}{\alpha_0} \sqrt{\frac{p}{a}} J_1 \left( r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \right] \left[ \frac{\pi}{6_1} \sqrt{\frac{p}{a}} K_1 \left( r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) - K_0 \left( r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \right] +$$

де

$$+ \left[ J_0 \left( r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) + \frac{\pi}{6_1} \sqrt{\frac{p}{a}} J_1 \left( r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \right] \left[ \frac{\pi}{6_0} \sqrt{\frac{p}{a}} K_1 \left( r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) + K_0 \left( r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \right].$$

Рівняння (4) набуває вигляду:

$$= \frac{\left[ \overline{T}_{sv}(p) \left( \frac{\pi}{6_1} \sqrt{\frac{p}{a}} K_1 \left( r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) - K_0 \left( r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \right) + \overline{T}_{sz}(p) \left[ K_0 \left( r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) + \frac{\pi}{6_0} \sqrt{\frac{p}{a}} K_1 \left( r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \right] \right] J_0 \left( r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right)}{Z_n(p)} +$$

$$+ \frac{\left[ \overline{T}_{sv}(p) J_0 \left( r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) + \frac{\pi}{6_1} \sqrt{\frac{p}{a}} J_1 \left( r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \right] - \overline{T}_{sz}(p) \left[ J_0 \left( r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) - \frac{\pi}{6_0} \sqrt{\frac{p}{a}} J_1 \left( r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \right] K_0 \left( r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right)}{Z_n(p)}.$$

Передатні функції за двома каналами:

$$W_{T_{sv} \rightarrow n}(p, r) = \frac{\left\{ \frac{\lambda}{6_1} \sqrt{\frac{p}{a}} K_1 \left( r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) - K_0 \left( r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \right\} J_0 \left( r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) + \left[ \frac{\pi}{6_1} \sqrt{\frac{p}{a}} J_1 \left( r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) + J_0 \left( r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \right] K_0 \left( r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right)}{Z_n(p)},$$

$$W_{T_{sz} \rightarrow n}(p, r) = \frac{J_0 \left( r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \left[ K_0 \left( r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) + \frac{\pi}{6_0} \sqrt{\frac{p}{a}} K_1 \left( r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \right] - K_0 \left( r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \left[ J_0 \left( r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) - \frac{\pi}{6_0} \sqrt{\frac{p}{a}} J_1 \left( r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \right]}{Z_n(p)}.$$

Для розрахунку частотних характеристик на базі передатних функцій слід взяти до уваги:

$$\begin{cases} I_0(x\sqrt{j}) = \text{ber } x + j \text{ bei } x, \\ \sqrt{j} I_1(x\sqrt{j}) = \text{ber}' x + j \text{ bei}' x, \\ K_0(x\sqrt{j}) = \text{ker } x + j \text{ kei } x, \\ \sqrt{j} K_1(x\sqrt{j}) = -(\text{ker}' x + j \text{ kei}' x). \end{cases}$$

Функції  $\text{ber}(x)$  і  $\text{bei}(x)$  (Bessel real, Bessel imagine),  $\text{ker}(x)$  і  $\text{kei}(x)$  (Kelvin real, Kelvin imagine) називають функціями Томсона (Кельвіна). Ці функції табульовано [8, 10]. Коли  $x < 1$ , їх можна обчислити так:

$$\begin{aligned} \text{ber}(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n}}{2^{4n} [(2n)!]^2}; \quad \text{bei}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+2}}{2^{2n+2} [(2n+1)!]^2}; \\ \text{ker}(x) &= \left( \ln \frac{2}{x} - C \right) \text{ber}(x) + \frac{\pi}{4} \text{bei}(x) + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n}}{2^{2n} [(2n)!]^2} \sum_{m=1}^{2n} \frac{1}{m}; \\ \text{kei}(x) &= \left( \ln \frac{2}{x} - C \right) \text{bei}(x) + \frac{\pi}{4} \text{ber}(x) + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+2}}{2^{4n+2} [(2n+1)!]^2} \sum_{m=1}^{2n+1} \frac{1}{m}; \quad \text{ber}'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4nx^{4n-1}}{2^{4n} [(2n)!]^2}; \\ \text{bei}'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(4n+2)x^{4n+1}}{2^{2n+2} [(2n+1)!]^2}; \quad \text{ker}'(x) = -\frac{1}{x} \text{ber}(x) + \left( \ln \frac{2}{x} - C \right) \text{ber}'(x) - \frac{\pi}{4} \text{bei}'(x) + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{4nx^{4n-1}}{2^{4n} [(2n)!]^2} \sum_{m=1}^{2n} \frac{1}{m}; \\ \text{kei}'(x) &= -\frac{1}{x} \text{bei}(x) + \left( \ln \frac{2}{x} - C \right) \text{bei}'(x) - \frac{\pi}{4} \text{ber}'(x) + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(4n+2)x^{4n+1}}{2^{4n+2} [(2n+1)!]^2} \sum_{m=1}^{2n+1} \frac{1}{m}. \end{aligned}$$

$$\text{Коли } x \geq 1: \text{ber}(x) \cong \frac{e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}}{\sqrt{2\pi x}} \left[ L_0(x) \cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right) - M_0(x) \sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right) \right];$$

$$\text{bei}(x) \cong \frac{e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}}{\sqrt{2\pi x}} \left[ M_0(x) \cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right) - L_0(x) \sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right) \right];$$

$$\text{ker}(x) \cong \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}} \left[ L_0(-x) \cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}\right) + M_0(-x) \sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}\right) \right];$$

$$\text{kei}(x) \cong \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}} \left[ M_0(-x) \cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}\right) - L_0(-x) \sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}\right) \right];$$

$$\text{ber}'(x) \cong \frac{e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}}{\sqrt{2\pi x}} \left[ S_0(x) \cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}\right) - T_0(x) \sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}\right) \right];$$

$$\text{bei}'(x) \cong \frac{e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}}{\sqrt{2\pi x}} \left[ T_0(x) \cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}\right) + S_0(x) \sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}\right) \right];$$

$$\text{ker}'(x) \cong -\sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}} \left[ S_0(-x) \cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right) + T_0(-x) \sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right) \right];$$

$$\text{kei}'(x) \cong -\sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}} \left[ T_0(-x) \cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right) - S_0(-x) \sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right) \right],$$

$$\text{де } L_0(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^2 3^2 5^2 \dots (2n-1)^2}{n! (8x)^n} \cos\left(n \frac{\pi}{4}\right); \quad M_0(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^2 3^2 5^2 \dots (2n-1)^2}{n! (8x)^n} \sin\left(n \frac{\pi}{4}\right);$$

$$S_0(x) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^2 3^2 5^2 \dots (2n+1)^2}{(2n-1)(2n+1)n! (8x)^n} \cos\left(n \frac{\pi}{4}\right); \quad T_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^2 3^2 5^2 \dots (2n+1)^2}{(2n-1)(2n+1)n! (8x)^n} \sin\left(n \frac{\pi}{4}\right).$$

Для реалізації цього алгоритму слід мати підпрограми для обчислення функцій  $\text{ber}(x)$ ,  $\text{bei}(x)$ ,  $\text{ker}(x)$ ,  $\text{kei}(x)$ , а в загальному випадку – і  $\text{ber}'(x)$ ,  $\text{bei}'(x)$ ,  $\text{ker}'(x)$ ,  $\text{kei}'(x)$ .

За необхідності ці підпрограми користувач може написати самостійно. Можна також скористатися таблицями відповідних функцій, сформувавши на їх базі інтерполяційні структури (поліноми, кубічні сплайни чи B-сплайни). Але найбільш доцільним виглядає чисельне інтегрування диференціальних рівнянь (1) із відповідними межовими умовами за одиничного ступінчастого вхідного сигналу та нульових початкових умов. Таким чином можна було б сформувати масив ординат перехідної характеристики. Шляхом чисельного диференціювання цей масив можна було б перерахувати в масив ординат імпульсної характеристики, а останній – у дійсно- та уявно-частотні характеристики. Такий алгоритм розглянуто у праці [10].

**Висновки.** Одержано передатні функції й частотні характеристики об'єктів із розподіленими параметрами, які з точки зору математичного моделювання розглядають як циліндричні теплоакуючі стінки. Передатні функції є трансцендентними. Їхне безпосереднє використання для вирішення задач аналізу й синтезу систем керування не є тривіальним. Ця обставина обумовлює напрями **подальших досліджень**. Перший пов'язаний із розробленням методів безпосереднього використання передатних функцій нетривіальної структури для аналізу та синтезу систем керування. Другий – передбачає використання

відомих методів аналізу й синтезу систем керування, але тоді передатні функції слід подавати у вигляді дробово-раціональних, що обумовлює потребу у розробленні відповідних методів апроксимації та аналізу їх ефективності.

#### Список використаної літератури

1. Рапопорт Э. Я. Анализ и синтез систем автоматического управления с распределенными параметрами / Э. Я. Рапопорт. – М. : Высш. шк., 2005. – 292 с.
2. Шевяков А. А. Управление тепловыми объектами с распределенными параметрами / А. А. Шевяков, Р. В. Яковлева. – М. : Энергоатомиздат, 1986. – 208 с.
3. Бутковский А. Г. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами / А. Г. Бутковский. – М. : Наука, 1965. – 474 с.
4. Бутковский А. Г. Методы управления систем с распределенными параметрами / А. Г. Бутковский. – М. : Наука, 1975. – 568 с.
5. Владимиров В. С. Уравнения математической физики / В. С. Владимиров. – М. : Наука, 1976. – 435 с.
6. Лаврентьев М. А. Проблемы гидродинамики и их математические модели / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. – М. : Наука, 1973. – 416 с.
7. Бутковский А. Г. Характеристики систем с распределенными параметрами / А. Г. Бутковский. – М. : Наука, 1979. – 224 с.
8. Двайт Г. Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы / Г. Б. Двайт. – М.: Наука, 1977. – 368 с.
9. Кубрак А. І. Передатні функції та частотні характеристики циліндричної теплоакumuлюючої стінки / А. І. Кубрак, А. І. Жученко // Вісн. Нац. техн. ун-ту України «Київ. політехн. ін-т» : сер. «Хім. інженерія, екологія та ресурсозбереження». – 2013. – № 1 (11). – С. 81–88.
10. Жученко А. І. Ідентифікація динамічних характеристик. Комп'ютерні методи / А. І. Жученко, М. З. Кваско, Н. А. Кубрак. – К. : Вир. відділ КЛТКМ та М, 2000. – 182 с.

Надійшла до редакції 16.04.2014.

---

**Kubrak A. I., Zhuchenko O. A.**

#### **TRANSFER FUNCTIONS AND FREQUENCY RESPONSES OF CYLINDRICAL HEAT STORAGE WALL: NEW VERSIONS**

*Almost all real objects control in chemical, food, metallurgical, oil and other industries, in fact in the entire field of human activity are objects with distributed parameters.*

*From mathematical modeling point of view a lot of plants in different industries can be considered as cylindrical heat storage walls with distributed parameters. Selected research path based on the following considerations: consider only heat objects with distributed parameters as the most common in the industry; Mathematical model objects with distributed parameters obtained in the form of the transfer function as the most suitable for further research in terms of analysis and synthesis of control systems using existing software. The aim of this study was to receive transfer functions and frequency responses as mathematical models of above mentioned plants. To solve this problem the main equation of heat conductivity was put in basis. In addition three kinds of boundary conditions on external and internal wall surfaces were taken into account. Different combinations of boundary conditions on external and internal wall surfaces result in different kinds of transfer functions and frequency responses. These functions are transcendental and perhaps must be simplified for practical using. It was proposed few nontrivial ways in order to calculate frequency responses of cylindrical heat storage walls. To implement this calculation it is necessary to have available a subroutine for computing certain functions. If necessary, these routines can create their own with the above formulas. You can also use the tables of the functions, forming the basis of their structure interpolation (polynomial, cubic splines or B-splines). But most appropriate looks above numerical integration of differential equations with appropriate boundary conditions on single stepped input signal with zero initial conditions.*

*Obtained results can be used for researching of plants, which can be considered as cylindrical heat storage walls with distributed parameters, and for control system synthesis.*

**Keywords:** *transfer function, frequency response, cylindrical heat storage wall, boundary conditions.*

#### **References**

1. Рапопорт Э. Я. Анализ и синтез систем автоматического управления с распределенными параметрами [Analysis and Synthesis of Automatic Control Systems with Distributed Parameters]. – Moscow : Vishaja shkola Publ., 2005. – 292 p.
2. Sheviakov A. A., Yakovleva R. V. Upravlenye teplovimi objektami s raspredeennimi parametrami [Control of Heat Plants with Distributed Parameters]. – Moscow : Enerhoatomyzdat Publ., 1986. – 208 p.
3. Butkovskiy A. H. Teoriya optimalnogo upravleniya sistemami s raspredeennimi parametrami [Theory of Optimal Control by Systems with Distributed Parameters]. – Moscow : Nauka Publ., 1965. – 474 p.
4. Butkovskiy A. H. Metody upravleniya sistem s raspredeennimi parametrami [Methods of Control Systems with Distributed Parameters]. – Moscow : Nauka Publ., 1975. – 568 p.

5. *Vladymyrov V. S.* Uravneniia matematycheskoi fizyky [Equations of Mathematical Physics]. – Moscow : Nauka Publ., 1976. – 435 p.
6. *Lavrentev M. A., Shabat B. V.* Problemy hydrodynamyy i ikh matematycheskye modely [Hydrodynamics Problems and their Mathematical Models]. – Moscow : Nauka Publ., 1973. – 416 p.
7. *Butkovskiy A. H.* Kharakterystyky system s raspredelennimy parametramy [Responses of Systems with Distributed Parameters]. – Moscow: Nauka Publ., 1979. – 224 p.
8. *Dwight H. B.* Tablytsy yntehralov y druhye matematycheskye formuly [Tables of Integrals and Other Mathematical Formulas]. – Moscow : Nauka Publ., 1977. – 368 p.
9. *Kubrak A. I.* Peredatni funktsii ta chastotni kharakterystyky tsylindrychnoi teploakumuliuchoi stinky [Transfer Functions and Frequency Responses of Cylindrical Heat Storage Wall] / A. I. Kubrak, A. I. Zhuchenko // Visnyk natsionalnoho tekhnichnoho universytetu Ukrainy «Kyivskiy politekhnichnyi instytut»: serii «khimichna inzheneriia, ekolohiia ta resursozberezhennia». – 2013. – # 1(11). – P. 81–88.
10. *Zhuchenko A. I., Kvasko M. Z., Kubrak N. A.* Identyfikatsiia dynamichnykh kharakterystyk. Kompiuterni metody [Identification of Dynamic Responses. Computer Methods]. – Kyiv : KLTKM Publ., 2000. – 182 p.